Varianta 15

Subiectul I.

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 12$

b) $\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{12}{13}$.

c) Ecuația tangentei este $4x + 5y = 41$

d) Verificare directă.

e) $V_{ABCD} = \frac{5}{3}$.

f) $a = 1$ şi $b = 0$.

Subiectul II.

1.

a) $x \in (-4, 1)$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{1}{3}$.

c) $\left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right] = 3$.

d) $x = 8$.

e) $x_1 + x_2 + x_3 = -1$.

2.

a) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 - 2^x \cdot \ln 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Dreapta $Ox : y = 0$ este asimptota spre $-\infty$ la graficul funcției.

c) $x = -1$ este punct de minim global pentru funcția f.

Rezultă că $f(x) \geq f(-1) = -\frac{1}{4}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

d) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 6 \ln 2$.

e) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 13} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{14}{13}$.

Subiectul III.

a) $\det(A) = 0$ şi $\operatorname{rang}(A) = 1$.

b) $S = A - X \cdot Y = O_3$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Cum $(I_3+A)\cdot\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)\cdot(I_3+A)=I_3$, deoarece inversa unei matrice este unică, rezultă că $B^{-1}=I_3-\frac{1}{11}A$.

e) Se demonstrează prin inducție.

f) Matricele $U=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\9&6&4\end{pmatrix}$ au rangul 1 şi avem $B=U+V+W$.

g) Considerăm matricele $C,D\in M_3(\mathbf{C})$ de rang 1.

Cum $\operatorname{rang}(C)=1$, toate liniile matricei C sunt proporționale. De asemenea, toate liniile matricei D sunt proporționale. Scriind elementele liniilor celor două matrice în funcție de factorii de proporționalitate şi făcând calculele, obținem că $\det(C+D)=0$ şi deoarece $\det(B)\neq 0$, avem $C+D\neq B$.

Subiectul IV.

a) Calcul direct.

b) $f_2(x)=\frac{x^2}{2!}+\cos x-1$.

c) Se foloseşte primul principiu de inducție şi se integrează de două ori egalitatea din ipoteza de inducție.

d) Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)=+\infty$, graficul funcției f_1 nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Avem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{x}=1$, dar $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x)$ nu există, deci graficul funcției f_1 nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

e) Se demonstrează prin inducție.

f) Se foloseşte criteriul raportului.

g) Considerăm $x\in\mathbf{R}$.

Pentru $\underline{x>0}$, din **c)** obținem:

$$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=(-1)^n\cdot f_{2n+1}(x)+\sin x,\quad \forall\, n\in\mathbf{N}.$$

Din **e)** obținem $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, deci şi $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot f_{2n+1}(x)=0$

şi apoi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sin x$

Pentru $\underline{x=0}$, în relația din enunț se obține $0=0$, adevărat.

Pentru $\underline{x<0}$, deoarece funcțiile din enunț sunt impare, rezultă concluzia.